سلسلة الامتياز

في

الرياضيات

للصف الثالث الإعدادي
الفصل الدراسي الثاني

إعداد

الأستاذ/وليد محمد عكاشة

ت : ٠١٠٠٢٠٩٧٨٦٦

الوحدة الأولى

الدرس الأول

حل معادلتين في متغيرين من الدرجة الأولى جبرياً

← لحل معادلتين في متغيرين من الدرجة الأولى نستخدم طريقة الحذف

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية جبرياً :-

(1) س + ص = ٧ ، س - ص = ٣

الحل

س + ~~ص~~ = ٧ ← (1)

س - ~~ص~~ = ٣ ← (2)

بالجمع

~~٢~~س = ١٠ / ~~٢~~

بالتعويض في (1) $\boxed{\text{س = ٥}}$

٥ + ص = ٧ ← -٥

$\boxed{\text{ص = ٢}}$

∴ م.ح = {(٥، ٢)}

(2) ٢س + ص = ٠ ، س + ص = ١

الحل

٢س + ~~ص~~ = ٠ ← (1)

س + ~~ص~~ = ١ ← (2)

بالطرح

بالتعويض في (2) $\boxed{\text{س = -١}}$

-١ + ص = ١

ص = ١ + ١ ⇐ $\boxed{\text{ص = ٢}}$

∴ م.ح = {(-١، ٢)}

(3) س - ص = ٤ ، س + ٢ص = ١٣

الحل

س - ص = ٤ ← (1) ×٢

س + ٢ص = ١٣ ← (2)

بضرب المعادلة الأولى ×٢

٢س - ~~٢ص~~ = ٨

س + ~~٢ص~~ = ١٣

بالجمع

٣س = ٢١ ⇐ س = ٢١/٣

$\boxed{\text{س = ٧}}$ بالتعويض في (2)

٧ + ٢ص = ١٣

٢ص = ١٣ - ٧

~~٢~~ص / ~~٢~~ = ٦/٢ $\boxed{\text{ص = ٣}}$

∴ م.ح = {(٧، ٣)}

(4) ٢س + ٥ص = -٥ ، ٥س - ٢ص = ٣١

الحل

٢س + ٥ص = -٥ ← (1) ×٢

٥س - ٢ص = ٣١ ← (2) ×٥

بضرب المعادلة الأولى ×٢ (1) والثانية ×٥ (2)

٤س + ~~١٠ص~~ = -١٠

٢٥س - ~~١٠ص~~ = ١٥٥

بالجمع

~~٢٩~~س = ١٤٥ / ٢٩ / ~~٢٩~~

$\boxed{\text{س = ٥}}$ بالتعويض في (1)

٢×٥ + ٥ص = -٥ - ١٠

٥ص = -١٥ ⇐ ص = -١٥/٥

∴ $\boxed{\text{ص = -٣}}$

∴ م.ح = {(٥، -٣)}

⑤ ٢س + ص = ١٠ ، ص = ٣س

الحل
٢س + ص = ١٠ ← ①
٣س − ص = ٠ ← ②
بالجمع
٥س = ١٠ ⇐ س = $\frac{١٠}{٥}$
$\boxed{س = ٢}$ بالتعويض في ①
٢×٢ + ص = ١٠
ص = ١٠ − ٤ = ٦
$\boxed{ص = ٦}$
∴ م.ح = {(٢ ، ٦)}

⑥ ٢س = ٩ − ٥ص ، ٣س − ص − ٥ = ٠

الحل
٢س + ٥ص = ٩ ← ①
٣س − ص = ٥ ← ②
ترتيب المعادلتين أولاً
بضرب المعادلة ② × ⑤
٢س + ~~٥ص~~ = ٩
١٥س − ~~٥ص~~ = ٢٥
بالجمع
١٧س = ٣٤ ⇐ س = $\frac{٣٤}{١٧}$
∴ $\boxed{س = ٢}$ بالتعويض في ①
٢×٢ + ٥ص = ٩
٥ص = ٩ − ٤
٥ص = ٥ ⇐ ص = $\frac{٥}{٥}$
$\boxed{ص = ١}$
∴ م.ح = {(٢ ، ١)}

⑦ س = ٥ − ص ، ٢س + ٢ص = ٣

الحل
س + ص = ٥ ← ①
٢س + ٢ص = ٣ ← ②

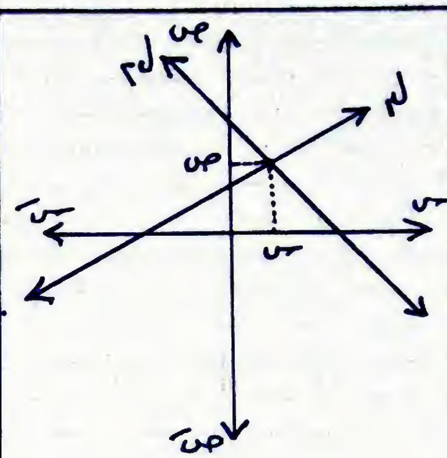
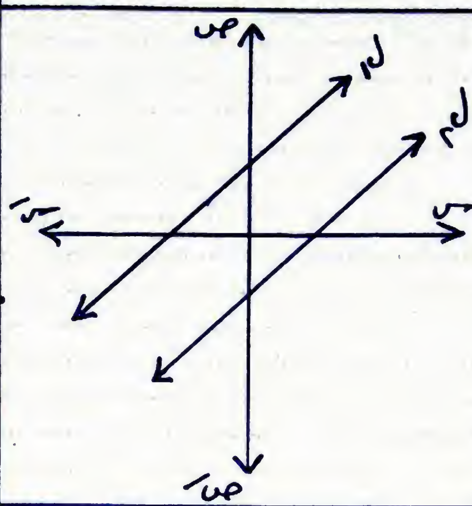
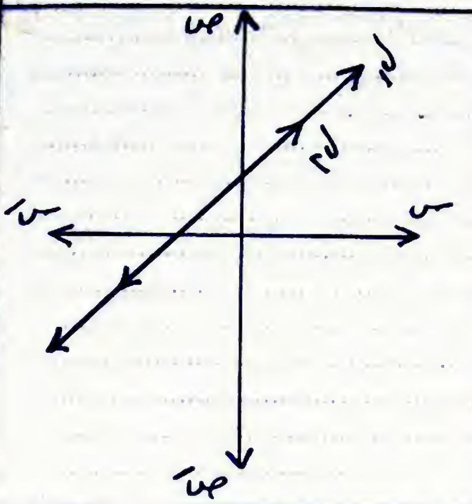
بضرب المعادلة ① × (−٢)
~~−٢س~~ − ~~٢ص~~ = −١٠
~~٢س~~ + ~~٢ص~~ = ٣
بالجمع
صفر ≠ −٧
∵ س ، ص تم حذفهم وتبقى الأعداد
∴ المستقيمان متوازيان
∴ م.ح = ∅

⑧ ٢س = ٨ − ٤ص ، س + ٢ص = ٤

الحل
٢س + ٤ص = ٨ ← ①
س + ٢ص = ٤ ← ②
بضرب المعادلة ② × (−٢)
~~٢س~~ + ~~٤ص~~ = ~~٨~~
~~−٢س~~ − ~~٤ص~~ = ~~−٨~~
بالجمع
كله إتحذف ∴ المستقيمان منطبقان
∴ م.ح = عدد لانهائي من الحلول
وأحد هذه الحلول هو
نشتغل على أي معادلة فيهم ولتكن الثانية
س + ٢ص = ٤
بوضع $\boxed{س = ٠}$
∴ ٠ + ٢ص = ٤ ⇐ ٢ص = ٤
ص = $\frac{٤}{٢}$ ← $\boxed{ص = ٢}$
∴ أحد الحلول هي {(٠ ، ٢)}

⇐ لاحظ أن معادلة واحدة من الدرجة الأولى في متغيرين لها عدد لانهائي من الحلول لذلك فإن المستقيمان المنطبقان يعتبروا معادلة واحدة.

الدرس الثانى [حل معادلتين الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً]

متقاطعان	متوازيان	منطبقان
		
م.ح = {(س ، ص)} عدد الحلول = حل وحيد	م.ح = ϕ عدد الحلول = صفر	م.ح = عدد لانهائى من الحلول عدد الحلول هو عدد لانهائى

[بحث نوع الخطين دون رسمهما]

إذا كان ل١ : أس + ب ص = جـ ، ل٢ : هـ س + و ص = د

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{و}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ كان المستقيمان منطبقان ويكون عدد الحلول عدد لانهائى وأحد هذه الحلول هو {(س ، ص)}

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{و}} \neq \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ كان المستقيمان متوازيان م.ح = ϕ عدد الحلول = صفر

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{هـ}} \neq \frac{\text{ب}}{\text{و}}$ كان المستقيمان متقاطعان م.ح = {(س ، ص)} حل وحيد (عدد الحلول)

مثال ① بين نوع الخطين

٢س + ٣ص = ١ ، ٤س + ٦ص = ٢

$\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{و}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

∴ المستقيمان منطبقان

مثال ② إذا كان ٥س + ل ص = ٣ ، ١٠س + ٦ص = ٥ متوازيان أوجد قيمة ل

∵ المستقيمان متوازيان ∴ $\frac{٥}{١٠} = \frac{\text{ل}}{٦}$

ل = $\frac{٥ \times ٦}{١٠} = \frac{٣٠}{١٠} = ٣$

∴ $\boxed{\text{ل} = ٣}$

③ أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

① ص = ٣س - ١ ، س - ص + ١ = ٠

الحل

ص = ٣س - ١

س	٠	١	٢
ص	-١	٢	٥

ص = ٣ × ٠ - ١ = -١

ص = ٣ × ١ - ١ = ٢

ص = ٣ × ٢ - ١ = ٥

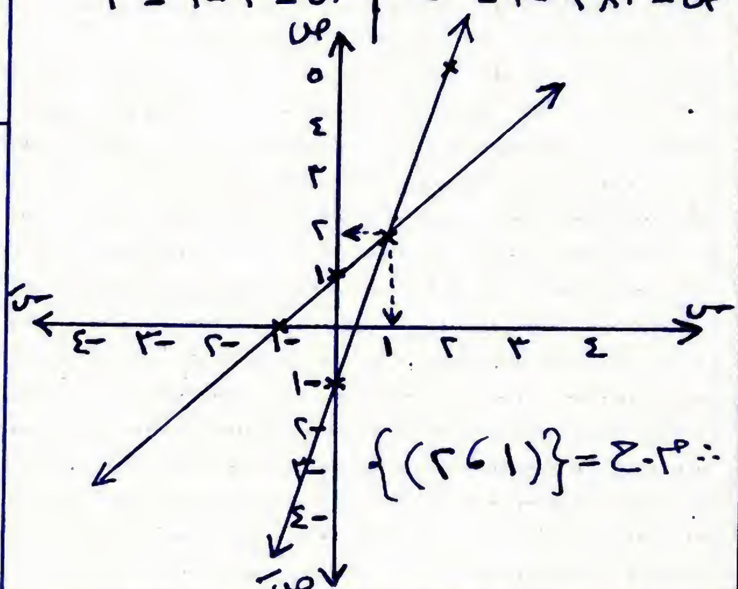
س = ص - ١

س	-١	٠	١
ص	٠	١	٢

س = ٠ - ١ = -١

س = ١ - ١ = ٠

س = ٢ - ١ = ١



∴ م.ح = {(١ ، ٢)}

② ٣س + ص = ٣ ، ٢ص + ٦س = ١٢

الحل

ص = ٣ - ٣س

س	٠	١	٢
ص	٣	٠	-٣

ص = ٣ - ٣ × ٠ = ٣

ص = ٣ - ٣ × ١ = ٠

ص = ٣ - ٣ × ٢ = -٣

٢ص = ١٢ - ٦س

بالقسمة على ②

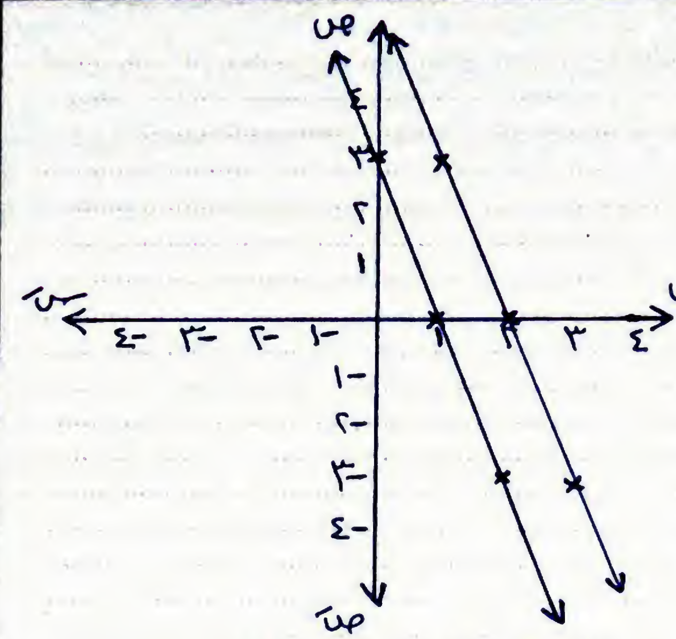
ص = ٦ - ٣س

س	١	٢	٣
ص	٣	٠	-٣

ص = ٦ - ٣ × ١ = ٣

ص = ٦ - ٣ × ٢ = ٠

ص = ٦ - ٣ × ٣ = -٣



∴ المستقيمان متوازيان

∴ م.ح = ∅

③ ٣س + ٢ص = ٦ ، ص = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ س

$\frac{٣س}{٣} = \frac{٦ - ٢ص}{٣}$

$س = \frac{٦ - ٢ص}{٣}$

س	٢	٠	٤
ص	٠	٣	-٣

$س = \frac{٦ - ٢ × ٠}{٣} = ٢$

$س = \frac{٦ - ٢ × ٣}{٣} = ٠$

$س = \frac{٦ - ٢ × -٣}{٣} = ٤$

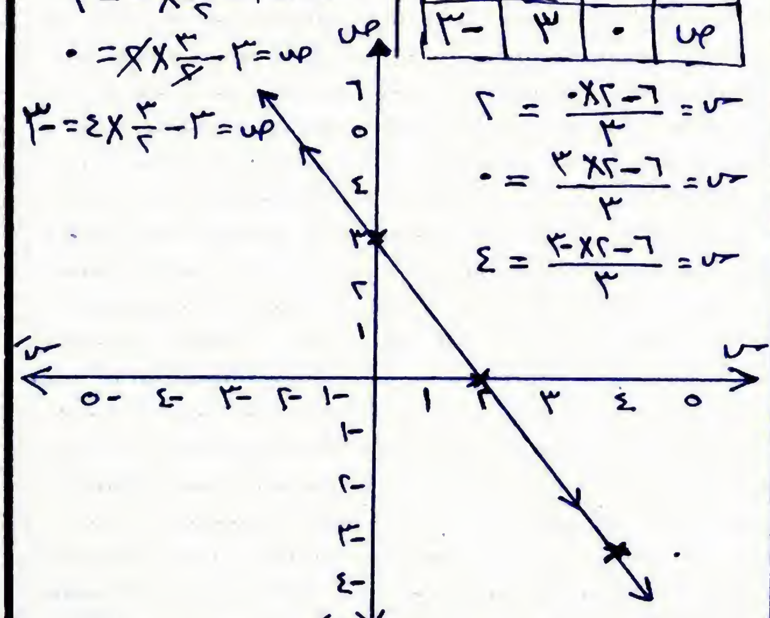
ص = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ س

س	٠	٢	٤
ص	٣	٠	-٣

ص = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ × ٠ = ٣

ص = ٣ - $\frac{٣}{\cancel{٢}}$ × $\cancel{٢}$ = ٠

ص = ٣ - $\frac{٣}{٢}$ × ٤ = -٣



∴ المستقيمان منطبقان

∴ م.ح عدد لا نهائي من الحلول

أحد هذه الحلول هي = {(٢ ، ٠)}

الدرس الثالث

تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين

عددان ← س ، ص

مجموعهم ← س + ص

الفرق بينهم ← س − ص

محيط المستطيل ← س + ص = ½ المحيط

يزيد ← (−)

أضيف ← (+)

ضعف الأول ← ٢س

ثلاثة أمثاله ← ٣س وهكذا !

زاويتان متتامتان ← س + ص = ٩٠°

زاويتان متكاملتان ← س + ص = ١٨٠°

[١] عددان نسبيان مجموعهم ٦٣ والفرق بينهم ١٢ أوجد العددين .

الحل: نفرض أن العددان هما س ، ص

س + ص = ٦٣ ← (١)

س − ص = ١٢ ← (٢)

بالجمع

٢س = ٧٥

س = ٧٥/٢ ، س = ٣٧٫٥

بالتعويض فى (١)

٣٧٫٥ + ص = ٦٣

ص = ٦٣ − ٣٧٫٥

ص = ٥١/٢ = ٢٥٫٥

∴ العددان هما ٧٥/٢ ، ٥١/٢

[٢] عددان إذا أضيف ثلاثة أمثال العدد الأول إلى ضعف العدد الثانى كان الناتج ١٩ وإذا أضيف العدد الأول إلى ثلاثة أمثال العدد الثانى كان الناتج ١٦ فما العددان

الحل: نفرض أن العدد الأول (س) ، الثانى (ص)

٣س + ٢ص = ١٩ ، س + ٣ص = ١٦

بضرب المعادلة (٢) × (−٣)

~~٣س~~ + ٢ص = ١٩

~~−٣س~~ − ٩ص = −٤٨

−٧ص = −٢٩

ص = ٢٩/٧

بالتعويض فى (٢)

س + ٣ × ٢٩/٧ = ١٦

س = ١٦ − ٨٧/٧

س = ٢٥/٧

∴ العددان هما ٢٩/٧ ، ٢٥/٧

[٣] مستطيل طوله يزيد عن ضعف عرضه بمقدار ١ ومحيطه ٢٠ سم أوجد كلاً من بعديه ومساحته .

الحل: نفرض أن الطول س سم ، العرض ص سم

س − ٢ص = ١ ← (١)

س + ص = ١٠ ← (٢) (×٢)

س − ~~٢ص~~ = ١

٢س + ~~٢ص~~ = ٢٠

بالجمع

٣س = ٢١

س = ٧

بالتعويض فى (٢)

٧ + ص = ١٠

ص = ١٠ − ٧

ص = ٣

∴ الطول = ٧ سم ، العرض = ٣ سم

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٧ × ٣ = ٢١ سم²

٤ زاويتان متكاملتان ضعف قياس كبرهما يساوى سبعة أمثال قياس الصغرى أوجد قياس كل زاوية .

تفرض أن قياس الصغرى س° ، الكبرى ص°

س + ص = ١٨٠ ، ٢ص = ٧س

س + ص = ١٨٠ ← ① × ٢

٧س − ٢ص = ٠ ← ②

بضرب المعادلة ① × ٢

٢س + ~~٢ص~~ = ٣٦٠°

٧س − ~~٢ص~~ = ٠

بالجمع

٩س = ٣٦٠° ⇐ س = $\frac{٣٦٠}{٩}$

$\boxed{\text{س = ٤٠°}}$ بالتعويض فى ①

٤٠ + ص = ١٨٠

ص = ١٨٠ − ٤٠

$\boxed{\text{ص = ١٤٠°}}$

∴ قياس الزاوية الصغرى = ٤٠° والكبرى ١٤٠°

٥ زاويتان حادتان فى مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠° أوجد قياس كل منهما

الحل

تفرض أن الزاويتان هما س ، ص

س + ~~ص~~ = ٩٠ ← ①

س − ~~ص~~ = ٥٠ ← ②

بالجمع

٢س = ١٤٠ ⇐ س = $\frac{١٤٠}{٢}$

$\boxed{\text{س = ٧٠°}}$ بالتعويض فى ①

٧٠ + ص = ٩٠ ⇐ ص = ٩٠° − ٧٠°

$\boxed{\text{ص = ٢٠°}}$

∴ الزاويتين هما ٧٠° ، ٢٠°

٦ عدد مكون من رقمين ورقم آحاده ضعف رقم عشراته ، وإذا عكس وضع الرقمين كان العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلى بمقدار ٣٦ أوجد العدد الأصلى .

الحل تفرض أن رقم الآحاد هو س

رقم العشرات هو ص

س = ٢ص ← ①

العدد الأصلى (س + ١٠ص)

وإذا عكس وضع الرقمين يكون الناتج (ص + ١٠س)

وإذا كان الناتج يزيد عن الأصلى بمقدار ٣٦

(ص + ١٠س) − (س + ١٠ص) = ٣٦

٩س − ٩ص = ٣٦ بالقسمة على ٩

س − ص = ٤ ← ②

بضرب المعادلة ② × −٢

س − ~~٢ص~~ = ٠

−٢س + ~~٢ص~~ = −٨

بالجمع

−س = −٨ $\boxed{\text{س = ٨}}$

بالتعويض فى ①

٢ص = ٨ ⇐ ص = $\frac{٨}{٢}$

∴ $\boxed{\text{ص = ٤}}$

∴ العدد الأصلى هو $\boxed{٤٨}$

دعاء المذاكرة

اللهم إنى أسألك فهم النبيين وحفظ المرسلين والملائكة المقربين ، اللهم أجعل ألسنتنا عامرة بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على ما تشاء قدير وحسبنا الله ونعم الوكيل

تمارين (١)

١ أكمل ما يأتي

① مجموعة حل المعادلتين س + ص = ٠ ، ص - ٥ = ٠ في ح × ح هي ......

② إذا كان المستقيمان س + ٣ص = ٤ ، س + أص = ٧ متوازيان فإن أ = ...

③ المستقيمان الممثلان للمعادلتين س + ٣ = ٠ ، ص = ٥ يتقاطعان في النقطة ....

④ نقطة تقاطع المستقيمين س + ٧ = ٠ ، ص - ١ = ٠ تقع في الربع ......

⑤ مجموعة حل المعادلتين ٤س + ص = ٦ ، ٢ص = ١٢ - ٨س في ح × ح هي ......

⑥ إذا كان للمعادلتين س + ٢ص = ١ ، س + أص = ٢ حل وحيد فإن أ لا يمكن أن تساوي ....

⑦ مجموعة حل المعادلتين س + ٣ص = ٤ ، ٣ص = ١ - س في ح × ح هي ....

⑧ المستقيمان ٣س + ٥ص = ٠ ، ٥س - ٢ص = ٠ يتقاطعان في ....

٢ أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية بيانياً:

① س + ص = ٤ ، ٢س - ص = ٢

② س = ٣ ، ٣س - ٥ص = ١

③ ٢س = ٧ - ص ، ٤س + ٢ص = ٣

④ ٣ص = ٦ ، س + ٦ص = ١٢

⑤ س - ٣ص = ٦ ، ٢س - ٦ص = ١٢

٣ أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية جبرياً:

① ص = ٢س - ١ ، س + ٢ص = ٨

② س + ص = ١ ، ص = ٢س + ٤

③ س + ٣ص = ١١ ، ص - ٣س + ١٣ = ٠

④ ٣س + ٥ص = ١١ ، ٥س + ٣ص = ١٣

⑤ س + ٧ص = ٢٢ ، ٤س + ٣ص = ١٣

⑥ ص - ٢ = ٠ ، ٣س + ص = ٧

⑦ ٥ص = ٢س + ١ ، س - ٢ص = ١

٤ أوجد قيمة أ ، ب إذا كان

أس + ب ص = ٥ ، ٣أس + ب ص = ١٧ علماً بأن (٣ ، -١) حل المعادلتين

٥ عددان مجموعهما ٣ والفرق بينهما -٧ أوجد العددين

٦ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣سم فإذا كان ضعف طوله ينقص عن أربعة أمثال عرضه بمقدار ٣سم ، أوجد بعدي المستطيل ومساحته.

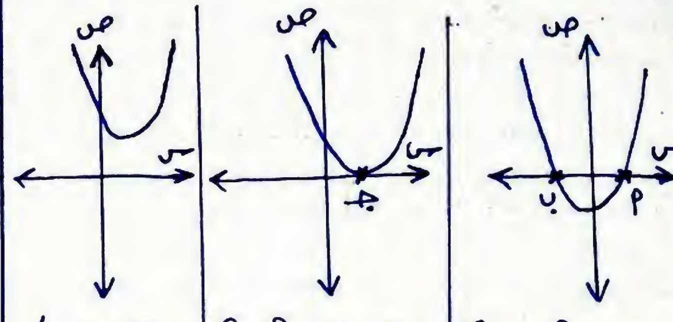
٧ زاويتان متتامتان قياس إحداهما يزيد عن خمسة أمثال قياس الأخرى بمقدار ٣٠° أوجد قياس كل زاوية

٨ منذ ٦ سنوات كان عمر رجل ستة أمثال عمر ابنه وبعد عشر سنوات يكون عمر الرجل ضعف عمر ابنه فما عمر كل منهما الآن

٩ عدد مكون من رقمين مجموعهما ٥ وإذا تغير وضع الرقمين فإن العدد الناتج ينقص عن العدد الأصلي بمقدار ٩ فما هو العدد الأصلي.

الدرس الرابع :-

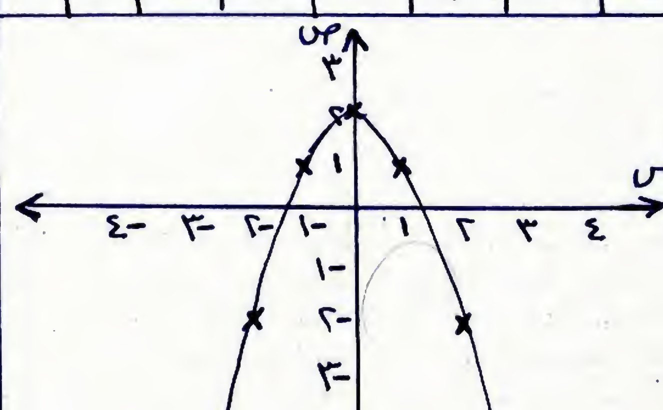
حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جبرياً وبيانياً



مثال ① مثل بيانياً د(س) = ٢ - س²
متخذاً س ∈ [-٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد إحداثي رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى ومجموعة حل المعادلة د(س) = صفر

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٧	-٢	١	٢	١	-٢	-٧



رأس المنحنى = (٠ ، ٢)

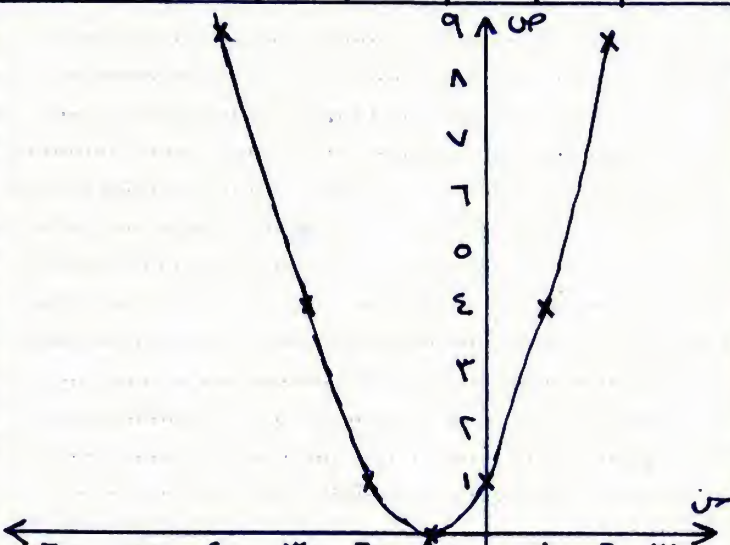
معادلة محور التماثل هي $\boxed{\text{س} = ٠}$

القيمة العظمى = ٢

م.ح = {-١٫٤ ، ١٫٤}

مثال ② د(س) = س² + ٢س + ١
متخذاً س ∈ [-٤ ، ٢] **الحل**

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



رأس المنحنى = (-١ ، ٠)

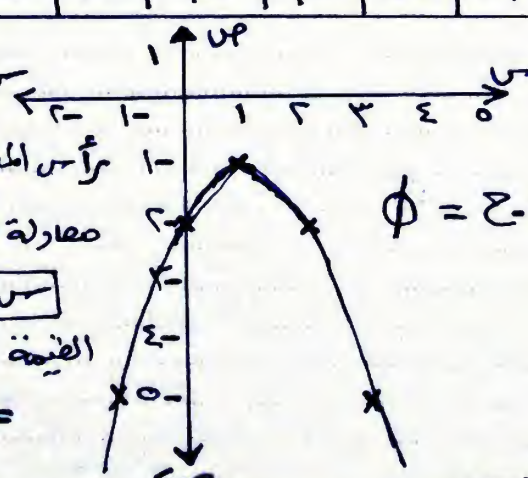
معادلة محور التماثل $\boxed{\text{س} = -١}$

القيمة الصغرى = صفر

م.ح = {-١}

مثال ③ د(س) = ٢س - ٢ - س² حيث
س ∈ [-١ ، ٣] **الحل**

س	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٥	-٢	-١	-٢	-٥



رأس المنحنى = (١ ، -١)

معادلة محور التماثل $\boxed{\text{س} = ١}$

القيمة العظمى = -١

م.ح = ∅

الحل الجبرى

[التحليل - القانون العام]

مثال ① حل جبرياً $س^{٢} + ٧س = ٨$

باستخدام التحليل $س^{٢} + ٧س - ٨ = ٠$

$(س + ٨)(س - ١) = ٠$

$\boxed{س = -٨}$ ، $\boxed{س = ١}$

$\therefore م.ح = \{-٨ ، ١\}$

ملحوظة: بعض المعادلات يصعب تحليلها لذلك نلجأ للقانون العام

* القانون العام

$أس^{٢} + ب س + جـ = صفر$

$$\boxed{س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}}$$

مثال ② أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية فى ح

① $س^{٢} - ٤س = -٢$ حيث $\sqrt{٢} \approx ١٫٤$

الحل $س^{٢} - ٤س + ٢ = ٠$

$\boxed{أ = ١}$ ، $\boxed{ب = -٤}$ ، $\boxed{جـ = ٢}$

$$س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٢}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢}$$

$$س = \frac{٤ \pm ٢ \times ١٫٤}{٢} = \frac{٤ \pm ٢٫٨}{٢}$$

$س_{١} = \frac{٤ + ٢٫٨}{٢}$ | $س_{٢} = \frac{٤ - ٢٫٨}{٢}$

$\boxed{س_{١} = ٣٫٤}$ | $\boxed{س_{٢} = ٠٫٦}$

$\therefore م.ح = \{٣٫٤ ، ٠٫٦\}$

مثال ⑤ أوجد مجموعة حل المعادلة $٣س^{٢} = ٥س - ١$ مقرباً الناتج لرقمين عشريين

الحل

$٣س^{٢} - ٥س + ١ = ٠$

$\boxed{أ = ٣}$ $\boxed{ب = -٥}$ $\boxed{جـ = ١}$

$$س = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٣} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$$

$س_{١} = \frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٦}$ | $س_{٢} = \frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٦}$

$\boxed{س_{١} = ١٫٤٣}$ | $\boxed{س_{٢} = ٠٫٢٣}$

$\therefore م.ح = \{١٫٤٣ ، ٠٫٢٣\}$

مثال ③ $س(س - ١) = ٤$ **الحل**

نضرب س × القوس أولاً وتصفر المعادلة

$س^{٢} - س - ٤ = صفر$

$\boxed{أ = ١}$ $\boxed{ب = -١}$ $\boxed{جـ = -٤}$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١} = \frac{١ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$$

$س_{١} = \frac{١ + \sqrt{١٧}}{٢}$ | $س_{٢} = \frac{١ - \sqrt{١٧}}{٢}$

$\boxed{س_{١} = ٢٫٥٦}$ | $\boxed{س_{٢} = -١٫٥٦}$

$\therefore م.ح = \{٢٫٥٦ ، -١٫٥٦\}$

④ $(س - ٣)^{٢} - ٥س = صفر$

الحل نفك القوس أولاً

$س^{٢} - ٦س + ٩ - ٥س = صفر$

$س^{٢} - ١١س + ٩ = صفر$

$\boxed{أ = ١}$ ، $\boxed{ب = -١١}$ ، $\boxed{جـ = ٩}$

$$س = \frac{١١ \pm \sqrt{١٢١ - ٤ \times ١ \times ٩}}{٢ \times ١} = \frac{١١ \pm \sqrt{٨٥}}{٢}$$

$س_{١} = \frac{١١ + \sqrt{٨٥}}{٢}$ | $س_{٢} = \frac{١١ + \sqrt{٨٥}}{٢}$

$\boxed{س_{١} = ٠٫٨٩}$ | $\boxed{س_{٢} = ١٠٫١}$

$\therefore م.ح = \{٠٫٨٩ ، ١٠٫١\}$

٥ $س + \frac{٤}{س} = ٦$ الحل

بضرب المعادلة × س

$س \times س + \frac{٤}{س} \times س = ٦ \times س$

$س^2 + ٤ = ٦ س$

$س^2 - ٦ س + ٤ = $ صفر

$\boxed{أ = ١}$ $\boxed{ب = -٦}$ $\boxed{جـ = ٤}$

$س = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ١ \times ٤}}{٢ \times ١} = \frac{٦ \pm \sqrt{٢٠}}{٢}$

$س_1 = \frac{٦ + \sqrt{٢٠}}{٢}$ | $س_2 = \frac{٦ - \sqrt{٢٠}}{٢}$

$\boxed{س_1 = ٥,٢}$ | $\boxed{س_2 = ٠,٧٦}$

٦ $\frac{٨}{س^2} + \frac{١}{س} = ١$ الحل

بضرب المعادلة × $س^2$

$\frac{٨}{س^2} \times س^2 + \frac{١}{س} \times س^2 = ١ \times س^2$

$٨ + س = س^2$

$س^2 - س - ٨ = $ صفر

$\boxed{أ = ١}$ $\boxed{ب = -١}$ $\boxed{جـ = -٨}$

$س = \frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times -٨}}{٢ \times ١} = \frac{١ \pm \sqrt{٣٣}}{٢}$

$س_1 = \frac{١ + \sqrt{٣٣}}{٢}$ | $س_2 = \frac{١ - \sqrt{٣٣}}{٢}$

$\boxed{س_1 = ٣,٣٧}$ | $\boxed{س_2 = -٢,٣٧}$

∴ م.ح = {٣,٣٧ ، −٢,٣٧}

٧ $\frac{س}{٣} = \frac{١}{٥ - س}$ الحل

بضرب مقص

$٥ س - س^2 = ٣$

$س^2 - ٥ س + ٣ = ٠$

$\boxed{أ = ١}$ $\boxed{ب = -٥}$ $\boxed{جـ = ٣}$

$س = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ١ \times ٣}}{٢ \times ١} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$

$س_1 = \frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٢}$ | $س_2 = \frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٢}$

$\boxed{س_1 = ٤,٣}$ | $\boxed{س_2 = ٠,٦٩٧}$

∴ م.ح = {٤,٣ ، ٠,٦٩٧}

تمارين (٢)

١ ارسم الشكل البياني للدالة د في الفترة المعطاة ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ مقرباً الناتج لرقم عشري واحد في كل مما يأتي

أ $د(س) = س^2 - ٢ س - ٤$ ، س ∈ [−٢ ، ٤]

ب $د(س) = ٢ س^2 + ٥ س$ ، س ∈ [−٤ ، ٢]

جـ $د(س) = ٣ س - س^2 + ٢$ ، س ∈ [−١ ، ٤]

د $د(س) = س(س - ٥) + ٣$ ، س ∈ [٠ ، ٥]

هـ $د(س) = س^2 - ٣$ ، س ∈ [−٣ ، ٣]

٢ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية باستخدام القانون العام

أ $س^2 - ٢ س - ٤ = ٠$ حيث $\sqrt{٥} \simeq ٢,٢٤$

ب $س^2 = ٢(س + ٦)$ ~~حيث √٥٢ = ٧,٢~~

جـ $س^2 - ٢(س + ٣) = ٠$

د $١ - \frac{٢}{س} = \frac{٢}{س^2}$

هـ $٩ س^2 - ٢٤ س + ١٦ = ٠$

و $س + \frac{٧}{س} + ١ = ٠$

ز $(س - ٣)^2 + ١ = ٠$

٣ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث $د(س) = ٤ - س^2$ حيث س ∈ [−٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد أ رأس المنحنى ب القيمة العظمى أو الصغرى للدالة د جـ معادلة محور التماثل د جذري المعادلة $س^2 = ٤$

(الدرس الخامس)

حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

لحل المعادلتين

① نفصل المعادلة من الدرجة الأولى
② نحضر المعادلة من الدرجة الثانية
⇐ نعوض في ② من ①
⇐ نفك القوس ونجمع المتشابهة
⇐ نحلل ونوجد قيم المتغير الأول
⇐ نعوض في ① ونوجد قيم المتغير الثاني
⇐ نكتب م.ح

مثال ① أوجد مجموعة حل كلاً من المعادلات الآتية

① س + ص = ٤ ، س^٢ + ص^٢ = ١٠

الحل

س = ٤ − ص ← ①
س^٢ + ص^٢ − ١٠ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

(٤ − ص)^٢ + ص^٢ − ١٠ = ٠
١٦ − ٨ص + ص^٢ + ص^٢ − ١٠ = ٠
٢ص^٢/٢ − ٨ص/٢ + ٦/٢ = صفر/٢
ص^٢ − ٤ص + ٣ = صفر
(ص − ١)(ص − ٣) = ٠

ص = ١ | ص = ٣

بالتعويض في ①

س = ٤ − ١ | س = ٤ − ٣
س = ٣ | س = ١

∴ م.ح = {(٣ ، ١) ، (١ ، ٣)}

② س − ٢ص = ٥ ، س ص + ٣ = ٠

الحل

س = ٥ + ٢ص ← ①
س ص + ٣ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

(٥ + ٢ص) ص + ٣ = ٠
٢ص^٢ + ٥ص + ٣ = ٠

(٢ص + ٣) ، (ص + ١)
٢ص + ٣ص = ٥ص

(٢ص + ٣)(ص + ١) = ٠

ص = −٣/٢ | ص = −١

بالتعويض في ①

س = ٥ + ٢ × −٣/٢ | س = ٥ + ٢ × −١
س = ٥ − ٣ | س = ٥ − ٢
س = ٢ | س = ٣

∴ م.ح = {(٢ ، −٣/٢) ، (٣ ، −١)}

③ ص − س = ٢ ، س^٢ + س ص − ٤ = ٠

الحل

ص = ٢ + س ← ①
س^٢ + س ص − ٤ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

س^٢ + س (٢ + س) − ٤ = ٠
س^٢ + ٢س + س^٢ − ٤ = ٠
٢س^٢/٢ + ٢س/٢ − ٤/٢ = ٠
س^٢ + س − ٢ = ٠
(س + ٢)(س − ١) = ٠

س = −٢ | س = ١

بالتعويض في ①

ص = ٢ + (−٢) | ص = ٢ + ١
ص = ٠ | ص = ٣

∴ م.ح = {(−٢ ، ٠) ، (١ ، ٣)}

أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

④ س + ١ = ٠ ، س² + ص² = ١٧

الحل

س + ١ = ٠ ⟸ س = -١

بالتعويض في ②

(-١)² + ص² = ١٧

١ + ص² = ١٧ ⟸ ص² = ١٧ - ١

√ص² = √١٦

ص = ± ٤

∴ م.ح = {(-١ ، ٤) ، (-١ ، -٤)}

⑤ س - ص = ٠ ، س ص = ١

الحل

س - ص = ٠

س = ص

بالتعويض في ②

س × س = ١ ⟸ √س² = √١

س = ± ١ ∵ س = ص

∴ ص = ± ١

∴ م.ح = {(١ ، ١) ، (-١ ، -١)}

⑥ س + ص = ٠ ، ٢س² - ص² = ٤

الحل

س = -ص ← ①

بالتعويض في ②

٢(-ص)² - ص² = ٤

٢ص² - ص² = ٤ ⟸ √ص² = √٤

ص = ± ٢ ∴ س = ∓ ٢

∴ م.ح = {(٢ ، -٢) ، (-٢ ، ٢)}

⑤ س - ٢ص = ٠ ، س² - ص² = ٣

الحل

س = ٢ص ← ①

س² - ص² - ٣ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

(٢ص)² - ص² - ٣ = ٠

٤ص² - ص² - ٣ = ٠

٣ص² - ٣ = ٠ نقسم على ③

ص² - ١ = ٠

(ص - ١)(ص + ١) = ٠

ص = ١ | ص = -١ بالتعويض في ①

س = ٢ × ١ | س = ٢ × -١

س = ٢ | س = -٢

∴ م.ح = {(٢ ، ١) ، (-٢ ، -١)}

⑥ ص + ٢س = ٧ ، ٢س² + س + ٣ص = ١٩

الحل

ص = ٧ - ٢س ← ①

٢س² + س + ٣ص - ١٩ = ٠ ← ②

بالتعويض في ②

٢س² + س + ٣(٧ - ٢س) - ١٩ = ٠

٢س² + س + ٢١ - ٦س - ١٩ = ٠

٢س² - ٥س + ٢ = ٠

(٢س - ١)(س - ٢) = ٠

(٢س - ١ ، س - ٢)

٤س + س = ٥س

س = ١/٢ | س = ٢

بالتعويض في ①

ص = ٧ - ٢ × ١/٢ | ص = ٧ - ٢ × ٢ = ٧ - ٤

ص = ٦ | ص = ٣

∴ م.ح = {(١/٢ ، ٦) ، (٢ ، ٣)}

لاحظ عددان س ، ص

- مجموع مربعيهما ← س² + ص²
- الفرق بين مربعيهما ← س² - ص²
- حاصل ضربهما ← س ص
- مساحة المستطيل ← س ص
- قطر المستطيل ← س² + ص² = مربع القطر
- وتر المثلث القائم ← س² + ص² = مربع الوتر
- مربع مجموعهما ← (س + ص)²
- مربع الفرق بينهما ← (س - ص)²
- قطر المعين وطول ضلعه ← س² + ص² = ٤ × (الضلع)²

حيث س ، ص طول قطرية

٧ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم وصاحته ٢٨ سم² أوجد محيطه. الحل

نفرض أن الطول س سم ، العرض ص سم

$س - ص = ٣$ ، $س ص = ٢٨$

$س = ٣ + ص \longrightarrow ①$

$س ص - ٢٨ = ٠ \longrightarrow ②$

بالتعويض في ②

$(٣ + ص) ص - ٢٨ = ٠$

$ص^2 + ٣ص - ٢٨ = ٠$

$(ص - ٤)(ص + ٧) = ٠$

$\boxed{ص = ٤}$ | $\boxed{ص = -٧}$ × مرفوض

بالتعويض في ①

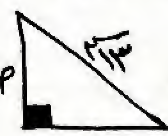
$س = ٣ + ٤$ $\boxed{س = ٧}$

∴ الطول = ٧ سم ، العرض = ٤ سم

∴ المحيط = (الطول + العرض) × ٢

$= (٧ + ٤) × ٢ = ٢٢$ سم

٨ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوي ٣٠ سم أوجد طول ضلعي القائمة.



نفرض أن طول ضلعي القائمة هما س ، ص

∴ $س^2 + ص^2 = ١٦٩$ ، من فيثاغورث

∴ $س + ص + ١٣ = ٣٠$ من المحيط

$س + ص = ٣٠ - ١٣$ | $\boxed{س + ص = ١٧}$

$س = ١٧ - ص \longrightarrow ①$

$س^2 + ص^2 - ١٦٩ = ٠ \longrightarrow ②$

بالتعويض في ②

$(١٧ - ص)^2 + ص^2 - ١٦٩ = ٠$

$٢٨٩ - ٣٤ص + ص^2 + ص^2 - ١٦٩ = ٠$

$\frac{٢ص^2}{٢} - \frac{٣٤ص}{٢} + \frac{١٢٠}{٢} = \frac{٠}{٢}$

$ص^2 - ١٧ص + ٦٠ = ٠$

$(ص - ١٢)(ص - ٥) = ٠$

$\boxed{ص = ١٢}$ | $\boxed{ص = ٥}$

بالتعويض في ①

$س = ١٧ - ١٢$ | $س = ١٧ - ٥$

$\boxed{س = ٥}$ | $\boxed{س = ١٢}$

∴ ضلعي القائمة هما ٥ سم ، ١٢ سم #

٩ مجموع عددين صحيحين هو ٩ والفرق بين مربعيهما ٢٧. أوجد العددين. الحل

نفرض أن العددان هما س ، ص

$س + ص = ٩$ ، $س^2 - ص^2 = ٢٧$

$س = ٩ - ص \longrightarrow ①$

$س^2 - ص^2 - ٢٧ = ٠ \longrightarrow ②$ بالتعويض في ②

$(٩ - ص)^2 - ص^2 - ٢٧ = ٠$

$٨١ + \cancel{ص^2} - ١٨ص - \cancel{ص^2} - ٢٧ = ٠$

$-١٨ص + ٥٤ = ٠$

$\frac{-١٨ص}{-١٨} = \frac{-٥٤}{-١٨} \Leftarrow \boxed{ص = ٣}$

بالتعويض في ①

$س = ٩ - ٣ \Leftarrow \boxed{س = ٦}$

∴ العددان هما ٦ ، ٣

١٠ مستطيل طول قطره ٥ سم ومحيطه ١٤ سم أوجد بعديه. الحل

نفرض أن بعديه هما س ، ص

$س + ص = ٧ \longrightarrow ①$ من المحيط

$س^2 + ص^2 = ٢٥ \longrightarrow ②$ من القطر

$س = ٧ - ص \longrightarrow ①$

$س^2 + ص^2 - ٢٥ = ٠ \longrightarrow ②$ بالتعويض في ②

$(٧ - ص)^2 + ص^2 - ٢٥ = ٠$

$٤٩ + ص^2 - ١٤ص + ص^2 - ٢٥ = ٠$

$\frac{٢ص^2}{٢} - \frac{١٤ص}{٢} + \frac{٢٤}{٢} = \frac{٠}{٢}$

$ص^2 - ٧ص + ١٢ = ٠$

$(ص - ٣)(ص - ٤) = ٠$

$\boxed{ص = ٣}$ | $\boxed{ص = ٤}$ بالتعويض في ①

$س = ٧ - ٣$ | $س = ٧ - ٤$

$\boxed{س = ٤}$ | $\boxed{س = ٣}$

∴ بعديه هما ٤ سم ، ٣ سم

ملحوظة البعدان هما (الطول ، العرض)

تمارين (٣)

١ أكمل ما يأتي:

① المعادلة س ص = ٣ من الدرجة ....

② مجموعة حل المعادلتين س = ١ ، س ص = ١ هي ......

③ مجموعة حل المعادلتين س = ١ ، س² + ص² = ١ هي ......

④ مجموعة حل المعادلتين س = ٢ ، س ص = ٦ هي ......

⑤ مجموعة حل المعادلتين س = ص ، س ص = ١ هي ......

⑥ مجموعة حل المعادلتين س - ص = ٠ ، س ص = ٩ هي ......

⑦ عددان موجبان مجموعهما ٧ ، حاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما ......

⑧ إذا كان أ ب = ٣ ، أ ب² = ١٢ فإن ب تساوي ......

٢ أوجد مجموعة حل أزواج المعادلات الآتية في ح

① س - ص = ١ ، س² + ص² = ٢٥

② ص - س = ٢ ، س² + س ص - ٤ = ٠

③ س - ٢ص - ١ = ٠ ، س² - س ص = ٠

④ س + ص = ٥ ، س ص = ٦

٣ عددان صحيحان مجموعهما ٧ ومجموع مربعيهما ٢٥ أوجد العددين

٤ مستطيل محيطه ٢٤ سم ومساحته ٣٥ سم² أوجد طول بعديه

٥ معين الفرق بين طولي قطريه ٤ سم ، محيطه يساوي ٤٠ سم أوجد طول كل من قطريه

٦ عددان أحدهما معكوس جمعي للآخر ومجموع مربعيهما هو ٢ أوجد العددين

٧ عددان الفرق بينهم ٥ وحاصل ضربهما ٣٦ أوجد العددين

(اختبار على الوحدة الأولى)

١ أكمل ما يأتي

① إذا كان المستقيمان ٣س + ٥ص = ٤ ، أ س + ١٠ص = ٣ متوازيان فإن أ = ...

② مجموعة حل المعادلتين ص - ٤ = ٣ ، س - ١ = ٠ في ح هي ......

③ مجموعة حل المعادلة س³ + ٤س = ٠ في ح هي ......

④ مجموعة الحل للمعادلتين س - ص = ٠ ، س ص = ٤ في ح × ح هي ......

⑤ منحنى الدالة د(س) = س² - ٥س يقطع محور السينات في النقطتين ......

⑥ مجموعة حل المعادلتين س + ٣ص = ٤ ، ٣ص + س = ١ في ح × ح هي ......

٢ (أ) أوجد جبرياً مجموعة حل المعادلتين في ح × ح

٢س - ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

س² - ٢س = ٨

٣ (أ) أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين

س - ص = ٤ ، س² + ص² = ٢٦

(ب) ارسم الشكل البياني للدالة

د(س) = س² - ٢س + ١ في الفترة [-٢ ، ٤] ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س² - ٢س + ١ = ٠

٤ (أ) أوجد بيانياً مجموعة حل المعادلتين

ص - ٥ = ٠ ، س + ص = ٣

(ب) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم ومحيطه ٢٦ سم أوجد كلاً من بعديه ومساحته

(الوحدة الثانيــة)

الدرس الأول [أصفار الدالة]

أصفار الدالة: هي قيم س التي تجعل الدالة تساوي صفر

فمثلاً د(س) = س − ٢ فيمنها تساوي صفر عند $\boxed{س = ٢}$

∴ نقول أن الدالة أصفارها ص(د) = {٢}

خطوات حساب أصفار الدالة

① نساوي الدالة بالصفر

② نحلل ونوجد قيم س

③ نكتب ص(د)

ملحوظة إذا كانت الدالة كسرية (بسط ومقام)

نحسب أصفار البسط لوحدها ونحسب أصفار المقام لوحدها ثم نحسب {أصفار البسط} − {أصفار المقام}

← يعني اللي موجود في البسط وغير موجود في المقام

ملحوظة ← أي دالة لا تحلل مثل مجموع المربعين (س^2 + عدد) أصفارها ∅

← أي دالة ثابتة أصفارها ∅

ماعدا د(س) = صفر أصفارها ح

مثال ① احسب أصفار كلاً من الدوال الآتية:

① د(س) = (س − ١)(س − ٢) **الحل**

(س − ١)(س − ٢) = ٠ متحللة جاهزة

$\boxed{س = ١}$ | $\boxed{س = ٢}$ ∴ ص(د) = {١، ٢}

② د(س) = س^2 − ١٦ **الحل**

س^2 − ١٦ = ٠ = (س − ٤)(س + ٤) = ٠

$\boxed{س = ٤}$ ، $\boxed{س = −٤}$

∴ ص(د) = {٤، −٤}

③ د(س) = س^2 − ٢س **الحل**

س^2 − ٢س = ٠

س(س − ٢) = ٠

$\boxed{س = ٠}$ | $\boxed{س = ٢}$

∴ ص(د) = {٠، ٢}

④ د(س) = −٧ ثابتة أصفارها ∅

⑤ د(س) = س^2 + ٩ لا تحلل أصفارها ∅

⑥ د(س) = صفر أصفارها ح

⑦ د(س) = $\dfrac{٢س^3 − ١٨س}{س^2 + ٢س − ٣}$ **الحل**

$\dfrac{٢س^3}{٢} − \dfrac{١٨س}{٢} = \dfrac{٠}{٢}$

س^3 − ٩س = ٠

س(س^2 − ٩) = ٠

س(س − ٣)(س + ٣) = ٠

$\boxed{س = ٠}$ | $\boxed{س = ٣}$ | $\boxed{س = −٣}$

أصفار البسط = {٠، ٣، −٣}

س^2 + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

$\boxed{س = −٣}$ | $\boxed{س = ١}$

∴ أصفار المقام = {−٣، ١}

∴ ص(د) = {٠، ٣}

⑧ د(س) = ٦س^2 + س − ١٢ **الحل**

٦س^2 + س − ١٢ = ٠

(٢س + ٣)(٣س − ٤) = ٠

٢س + ٣
٣س − ٤

٩س
−٨س
س

$\boxed{س = \frac{−٣}{٢}}$ | $\boxed{س = \frac{٤}{٣}}$

∴ ص(د) = {$\frac{−٣}{٢}$، $\frac{٤}{٣}$}

وإذا غامرت في شرفٍ مرومِ ∴ فلا ترضى بما دون النجومِ

⑨ $د(س) = س^{4} + ١٢٥ س$

الحل: $س^{4} + ١٢٥ س = ٠$

$س (س^{3} + ١٢٥) = ٠$

$س (س + ٥)(س^{2} - ٥س + ٢٥) = ٠$

$\boxed{س = ٠}$ | $\boxed{س = -٥}$ | ϕ

$\therefore ص(د) = \{٠ ، -٥\}$

مثال ② : اذا كانت $\{-٣ ، ٣\}$ هي مجموعة أصفار الدالة $د(س) = س^{2} + م$ فأوجد قيمة $م$

الحل: نعوض عن قيم س مرة (-٣) ومرة (٣) ونساوي الناتج بالصفر

$(-٣)^{2} + م = ٠ \Leftarrow \boxed{م = -٩}$

$(٣)^{2} + م = ٠ \Leftarrow \boxed{م = -٩}$

$\therefore$ قيمة $\boxed{م = -٩}$

مثال ③ : اذا كانت أصفار الدالة د حيث $د(س) = م س^{2} + ب س + ١٥$ هي $\{٣ ، ٥\}$ أوجد قيمة كل من م ، ب

الحل

عند $\boxed{س = ٣}$

$م \times (٣)^{2} + ب \times ٣ + ١٥ = ٠$

$٩م + ٣ب + ١٥ = ٠ \longleftarrow ①$

$م \times (٥)^{2} + ب \times ٥ + ١٥ = ٠$

$٢٥م + ٥ب + ١٥ = ٠ \longleftarrow ②$

نضرب ① × ٥ ونضرب ② × -٣

$٤٥م + \cancel{١٥ب} + ٧٥ = ٠$

$-٧٥م - \cancel{١٥ب} - ٤٥ = ٠$ بالجمع

$-٣٠م + ٣٠ = ٠$

$\frac{\cancel{-٣٠}م}{\cancel{-٣٠}} = \frac{-٣٠}{-٣٠}$ $\boxed{م = ١}$ بالتعويض في ①

لنحصل على قيمة ب

$٩ \times ١ + ٣ب + ١٥ = ٠ \Leftarrow \frac{\cancel{٣}ب}{\cancel{٣}} = \frac{-٢٤}{٣}$

$\boxed{ب = -٨}$

الدرس الثاني [مجال الدالة]

مجال الدالة هو قيم س التي تجعل الدالة معرفة فمثلاً $د(س) = \frac{٣}{س - ١}$ يكون لها الناتج عند التعويض عن س بأي عدد ماعدا $\boxed{س = ١}$ لأنه $\frac{٣}{١ - ١} = \frac{٣}{٠} =$ غير معرفة

⟸ فنقول أننا يمكن أن نعوض عن س بأي عدد ماعدا $\boxed{س = ١}$

فنقول أن مجال الدالة هو $ح - \{١\}$

⟸ أي مجموعة التعويض هي جميع الأعداد ماعدا $\{١\}$

⟸ مجال الدالة الكسرية = ح - {أصفار المقام}

⟸ **ملاحظات هامة**

⟸ الدالة التي ليس لها مقام مجالها ح

⟸ الدالة التي مقامها عدد ثابت مجالها ح

⟸ الدالة التي مقامها لا يحلل مجالها ح

⟸ عند حساب المجال نشتغل على المقام فقط | خطوات المجال

① نساوي المقام بالصفر

② نحلل ونوجد قيم س

③ المجال = ح - {قيم س}

⟸ المجال المشترك = ح - {كله بدون تكرار}

مثال ① أوجد مجال كلاً مما يأتي

① $ه(س) = \frac{س + ٣}{٤}$ مجالها ح
← عدد ثابت

② $ه(س) = \frac{س^{2} - ١}{س^{2} + ١}$ مجالها ح
← لا يحلل

③ $ه(س) = ٥س^{2} - ٢٥$ مجالها ح
(ليس لها مقام)

④ $ه(س) = \frac{س - ٢}{٢س}$ مجالها $ح - \{٠\}$

$\frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}} = \frac{٠}{٢} \Leftarrow \boxed{س = ٠}$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$ الحل

$\text{س}^{٢} - \text{س} = ٠$

$\text{س}(\text{س} - ١) = ٠$

$\boxed{\text{س} = ٠}$ | $\boxed{\text{س} = ١}$

∴ المجال = ح − {٠، ١}

مثال ② أوجد المجال المشترك لكل من

① $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س} + ١}$

الحل

$\text{س} = ٠$

المجال = ح − {٠}

$\text{س} + ١ = ٠$

$\boxed{\text{س} = -١}$

المجال = ح − {−١}

∴ المجال المشترك = ح − {٠، −١}

② $\text{د}_{١}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ١}$

الحل

$\text{س}^{٢} - \text{س} = ٠$

$\text{س}(\text{س} - ١) = ٠$

$\boxed{\text{س} = ٠}$ | $\boxed{\text{س} = ١}$

المجال = ح − {٠، ١}

$\text{س}^{٢} - ١ = ٠$

$(\text{س} - ١)(\text{س} + ١) = ٠$

$\boxed{\text{س} = ١}$ | $\boxed{\text{س} = -١}$

المجال = ح − {١، −١}

∴ المجال المشترك = ح − {٠، ١، −١}

③ $\frac{٤\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$ ، $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ١٦}$ ، $\frac{٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}$

الحل

$\text{س}^{٢} - \text{س} = ٠$ ، $\text{س}(\text{س} - ١) = ٠$

$\boxed{\text{س} = ٠}$ ، $\boxed{\text{س} = ١}$ مجال $\text{د}_{١}$ = ح − {٠، ١}

$\text{س}^{٢} + ١٦ = ٠$ لا تحلل مجال $\text{د}_{٢}$ = ح

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣ = ٠$ ، $(\text{س} - ٣)(\text{س} + ١) = ٠$

$\boxed{\text{س} = ٣}$ ، $\boxed{\text{س} = -١}$ مجال $\text{د}_{٣}$ = ح − {٣، −١}

∴ المجال المشترك = ح − {٠، ١، ٣، −١}

مثال ③ إذا كان مجال الدالة د :

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - \text{م}\text{س} + ٩}$ هو ح − {٣}

فأوجد قيمة م الحل

∴ مجال الدالة هو ح − {٣}

نعوض في المقام عن $\boxed{\text{س} = ٣}$ وتساويه بالصفر

$(٣)^{٢} - \text{م} \times ٣ + ٩ = ٠$

$٩ - ٣\text{م} + ٩ = ٠$

$\cancel{-٣}\text{م} = \frac{-١٨}{-٣}$ ⇐ $\boxed{\text{م} = ٦}$ #

الدرس الثالث [اختزال الكسر الجبري]

← خطوات اختزال الكسر الجبري

[١] نحلل البسط والمقام تحليلاً تاماً إن أمكن

[٢] نكتب المجال = ح − {أصفار المقام}

[٣] نختصر العوامل المتشابهة ونكتب الناتج في أبسط صورة

ملحوظة إذا كان $\boxed{\text{د}_{١} = \text{د}_{٢}}$

فإن مجال $\text{د}_{١}$ = مجال $\text{د}_{٢}$

$\text{د}_{١}(\text{س}) = \text{د}_{٢}(\text{س})$ بعد الاختصار

← لجميع قيم س التي تنتمي للمجال المشترك

أي أننا نأخذ المجال المشترك

أي لا يشترط أن يكون مجال $\text{د}_{١}$ = مجال $\text{د}_{٢}$

مثال ① اختصر مايأتي في أبسط صورة

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٣} - ٨}$ الحل

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}$

المجال = ح − {٢}

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ٦}{٤\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٣}$ الحل

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\cancel{(٢\text{س} + ٣)}(\text{س} + ٢)}{\cancel{(٢\text{س} + ٣)}(٢\text{س} - ١)}$

المجال = ح − {$\frac{١}{٢}$، $\frac{-٣}{٢}$} $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{٢\text{س} - ١}$

أ/ وليد محمد عكاشة
01002097866

مثال ② أثبت أن $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ حيث

$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{٢س}}{\text{٢س+٨}}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}\text{+٤س}}{\text{س}^{٢}\text{+٨س+١٦}}$

الحل

$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\cancel{\text{٢}}\text{س}}{\cancel{\text{٢}}\text{(س+٤)}}$

المجال = ح - {-٤}

$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س+٤}}$

$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}\cancel{\text{(س+٤)}}}{\cancel{\text{(س+٤)}}\text{(س+٤)}}$

المجال = ح - {-٤}

$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س+٤}}$

∵ مجال ن_1 = مجال ن_2

$\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ بعد الاختصار

∴ $\boxed{\text{ن}_1 = \text{ن}_2}$

مثال ③ أثبت أن $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ حيث

$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣}\text{-١}}{\text{س}^{٣}\text{+س}^{٢}\text{+س}}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{(س-١)(س+١)}}{\text{س}^{٢}\text{+س}}$

الحل

$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{(س-١)}\cancel{\text{(س}^{٢}\text{+س+١)}}}{\text{س}\cancel{\text{(س}^{٢}\text{+س+١)}}}$

المجال = ح - {٠}

$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س-١}}{\text{س}}$

$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{(س-١)}\cancel{\text{(س+١)}}}{\text{س}\cancel{\text{(س+١)}}}$

المجال = ح - {٠}

$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س-١}}{\text{س}}$

∵ مجال ن_1 = مجال ن_2

$\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ بعد الاختصار

∴ $\boxed{\text{ن}_1 = \text{ن}_2}$

علمتني الرياضيات :-

(إن لكل مجهول قيمة فلا تحتقر أحد لا تعرفه)

تمارين ٤

[١] أكمل ما يأتي

① مجموعة أصفار الدالة $\text{د(س)} = \text{-٣س}$ هي ....

② إذا كانت $\text{ص(د)} = \{٢\}$ حيث $\text{د(س)} = \text{س}^{٣} - \text{ل}$ فإن ل = ...

③ مجموعة أصفار الدالة $\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} = ٠$ هي ....

④ مجال الدالة د(س) = صفر هو ....

⑤ أصفار الدالة د(س) = صفر هو ....

⑥ مجال الدالة $\text{د(س)} = \frac{\text{س-٣}}{\text{س}^{٢}\text{-٩}}$ هو ....

⑦ أصفار الدالة $\text{د(س)} = \frac{\text{٣-س}}{\text{س}^{٢}\text{-٩}}$ هي ....

⑧ مجال الدالة $\text{د(س)} = \frac{\text{٣-س}}{٢}$ هو ....

⑨ مجال الدالة $\text{د(س)} = \frac{\text{س-٣}}{\text{س}^{٢}\text{+١}}$ هو ....

⑩ إذا كانت $\text{د(س)} = \frac{١}{٢}$ فإن ص(د) = ...

[٢] أوجد المجال المشترك لكل من الكسور الآتية

[١] $\frac{\text{س-٢}}{\text{س+٤}}$ ، $\frac{٧}{\text{س-٣}}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}\text{+٤}}$

[٢] $\frac{\text{س}^{٢}\text{-٤}}{\text{س}^{٢}\text{-٥س+٦}}$ ، $\frac{٧}{\text{س}^{٢}\text{-٩}}$ ، $\text{س}^{٢}\text{-٥}$

[٣] $\frac{١}{\text{٢س}}$ ، $\frac{\text{س-١}}{٥}$

[٣] أثبت أن $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ في كلاً مما يأتي

① $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}\text{+٤}}{\text{س}^{٣}\text{+٤س}}$

② $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{٣س}}{\text{٣س+١٢}}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}\text{+٤س}}{\text{س}^{٢}\text{+٨س+١٦}}$

[٤] أثبت أنه لجميع قيم س التي تنتمي إلى المجال المشترك $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ حيث

① $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}\text{+٢س}}{\text{س}^{٢}\text{-٤}}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}\text{-س}}{\text{س}^{٢}\text{-٣س+٢}}$

[٥] إذا كان $\text{ن(س)} = \frac{\text{س-٢}}{\text{س}^{٢}\text{-س-٦}}$ فأوجد

مجال ن(س)

الدرس الرابع

العمليات على الكسور الجبرية

[الجمع - الطرح - الضرب - القسمة]

* خطوات الحل:-

$\boxed{١}$ نحلل بسط ومقام الكسرين تحليلاً تاماً إن أمكن

$\boxed{٢}$ نكتب المجال = ح - {أصفار المقام}

← في حالة القسمة عند إيجاد المجال

المجال = ح - {أصفار مقام الأول وأصفار بسط ومقام الكسر الثاني}

$\boxed{٣}$ نختصر العوامل المتشابهة

← في الجمع والطرح نختزل كل كسر على حدى

← في الضرب نختصر المتشابهة من أي الكسرين

$\boxed{٤}$ نجري العملية الموجودة إذا كانت جمع أو طرح أو ضرب

$\boxed{٥}$ نبسط ونكتب الناتج

ملحوظة هامة في مسألة القسمة

يجب أولاً أن نحول القسمة لضرب باستخدام قاعدة $\boxed{\text{ثبت}}$ $\boxed{\text{إضرب}}$ $\boxed{\text{شقلب}}$

ثم نكمل حل المسألة مثل الخطوات السابقة

مثال $\boxed{١}$ أوجد ه(س) في أبسط صورة مبينا مجال ه

$\boxed{١}$ $ه(س) = \frac{س}{س^٢ + ٢س} + \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$ ثم أوجد ه(-٢) إن أمكن $\boxed{\text{الحل}}$

$$ه(س) = \frac{\cancel{س}}{\cancel{س}(س+٢)} + \frac{\cancel{س-٢}}{(\cancel{س-٢})(س+٢)}$$

المجال = ح - {٠، -٢، ٢}

$$ه(س) = \frac{١}{س+٢} + \frac{١}{س+٢} = \frac{٢}{س+٢}$$

∵ -٢ ∉ لمجال الدالة

∴ ه(-٢) غير ممكنة (غير معرفة)

$\boxed{٢}$ $ه(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٧س + ١٢} - \frac{٤}{س^٢ - ٤س}$ $\boxed{\text{الحل}}$

$$ه(س) = \frac{\cancel{س-٣}}{(\cancel{س-٣})(س-٤)} - \frac{٤}{س(س-٤)}$$

المجال = ح - {٣، ٤، ٠}

$$ه(س) = \frac{١}{س-٤} - \frac{٤}{س(س-٤)}$$

$$ه(س) = \frac{\cancel{س-٤}}{س(\cancel{س-٤})} = \frac{١}{س}$$

$\boxed{٣}$ $ه(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ - ١} \div \frac{٣س - ١٥}{س^٢ - ٤س - ٥}$ $\boxed{\text{الحل}}$

$$ه(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ - ١} \times \frac{س^٢ - ٤س - ٥}{٣س - ١٥}$$

$$ه(س) = \frac{(س-٢)(\cancel{س-١})}{(\cancel{س+١})(\cancel{س-١})} \times \frac{(\cancel{س-٥})(\cancel{س+١})}{٣(\cancel{س-٥})}$$

المجال = ح - {١، -١، ٥}

$$ه(س) = \frac{س-٢}{٣}$$

$\boxed{٤}$ $ه(س) = \frac{س^٢ - ١٢س + ٣٦}{س^٢ - ٦س} \times \frac{٤س + ٢٤}{٣٦ - س^٢}$ $\boxed{\text{الحل}}$

$$ه(س) = \frac{(\cancel{س-٦})(\cancel{س-٦})}{س(\cancel{س-٦})} \times \frac{٤(\cancel{س+٦})}{-(\cancel{س-٦})(\cancel{س+٦})}$$

المجال = ح - {٠، ٦، -٦}

$$\therefore ه(س) = \frac{١}{س} \times \frac{٤}{-١}$$

$$ه(س) = \frac{-٤}{س}$$

لا يكف المرء عن العلم حين يصبح عجوزاً بل يصبح عجوزاً حين يكف عن العلم......

⑤ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٦}{٢\text{س}^٢-١٥\text{س}+١٨} + \frac{\text{س}-٥}{٢\text{س}^٢-١٣\text{س}+١٥}$

الحل $٢\text{س}^٢-١٣\text{س}+١٥$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\cancel{\text{س}-٦}}{(٢\text{س}-٣)\cancel{(\text{س}-٦)}} + \frac{\cancel{\text{س}-٥}}{(٢\text{س}-٣)\cancel{(\text{س}-٥)}}$

المجال $= \text{ح} - \{\frac{٣}{٢}، ٦، ٥\}$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{٢\text{س}-٣} + \frac{١}{٢\text{س}-٣}$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{٢\text{س}-٣}$

⑥ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٣}{\text{س}^٢-٧\text{س}+١٢} - \frac{\text{س}-٣}{٣-\text{س}}$

الحل

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\cancel{\text{س}-٣}}{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}-٤)} + \frac{\cancel{\text{س}-٣}}{\cancel{\text{س}-٣}}$

المجال $= \text{ح} - \{٣، ٤\}$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}-٤} + \frac{١}{١} = \frac{\text{س}-٤+١}{\text{س}-٤}$

توحيد مقامات

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٣}{\text{س}-٤}$

⑦ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{٤} + \frac{-٢}{\text{س}+٢}$ الحل

المجال $= \text{ح} - \{-٢\}$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{٤} + \frac{-٢}{\text{س}+٢} = \frac{\text{س}^٢+٢\text{س}-٨}{٤(\text{س}+٢)}$

توحيد المقامات

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢+٢\text{س}-٨}{٤(\text{س}+٢)}$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٤)}{٤(\text{س}+٢)}$

مثال ② إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢-٢\text{س}}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢)}$

① اختصر $\text{ن}^{-١}(\text{س})$ وعين المجال

② إذا كان $\text{ن}^{-١}(\text{س}) = ٣$ فما قيمة س ؟

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢)}$

الحل: $\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^٢+٢)\cancel{(\text{س}-٢)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}-٢)}}$

المجال $= \text{ح} - \{٠، ٢\}$

لاحظنا ضد المجال من فوق وتحت طالما شقلبنا الدالة

$\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢+٢}{\text{س}}$

إذا كانت $\text{ن}^{-١}(\text{س}) = ٣$

$\therefore \frac{\text{س}^٢+٢}{\text{س}} = \frac{٣}{١}$

$\text{س}^٢+٢ = ٣\text{س}$

$\text{س}^٢-٣\text{س}+٢ = ٠$

$(\text{س}-٢)(\text{س}-١) = ٠$

$\boxed{\text{س}=٢}$ | $\boxed{\text{س}=١}$

مثال ③ إذا كان مجال الدالة ن حيث $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{ب}}{\text{س}} + \frac{٩}{\text{س}+\text{أ}}$ **هو** $\text{ح} - \{٠، ٤\}$

، $\text{ن}(٥) = ٢$ **أوجد قيمتي أ، ب**

الحل

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{ب}}{\text{س}} + \frac{٩}{\text{س}+\text{أ}}$

المجال $= \text{ح} - \{٠، -\text{أ}\}$

$\therefore -\text{أ} = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -٤}$

$\because \text{ن}(٥) = ٢$

$\therefore \frac{\text{ب}}{٥} + \frac{٩}{٥-٤} = ٢$

$\frac{\text{ب}}{٥} + ٩ = ٢ - ٩$

$\frac{\text{ب}}{٥} = \frac{-٧}{١}$

$\boxed{\text{ب} = -٣٥}$ #

تمارين (٥)

① أكمل ما يأتي

[١] مجموعة أصفار الدالة $د(س) = (س - ٥)^{٢}$ هي ....

[٢] مجال الدالة $د(س) = \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} - ٢س - ٣}$ هو ....

[٣] المجال المشترك للدالتين $د_{١}(س) = \frac{س + ١}{س}$ ، $د_{٢}(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ هو ....

[٤] أبسط صورة للكسر $\frac{٢س + ٦}{س + ٣}$ هو ....

[٥] إذا كان $ن(س) = \frac{س + ٣}{س - ٢}$ فإن مجال $ن^{-١}(س)$ هو ....

[٦] $ن(س) = \frac{س}{س - ١} + \frac{-١}{س - ١} = ...$ في أبسط صورة

[٧] مجال المعكوس الجمعي للكسر $\frac{س + ٥}{س - ١}$ هو ....

[٨] مجال المعكوس الضربي للكسر $\frac{س + ٥}{س - ١}$ هو ....

[٩] إذا كانت $ن(س) = \frac{س + ٣}{س - ١}$ فإن $ن(٢) = ...$ ، $ن(-٣) = ...$ ، $ن(١) = ...$

[١٠] أبسط صورة للدالة $ن(س) = \frac{س}{س - ٣} \div \frac{٣س}{س^{٢} - ٩}$ هي ....

[١١] مجموعة أصفار الدالة $د(س) = \frac{س - ٣}{س + ٢}$ هي ....

[٢] أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال.

① $ن(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ٣س + ٢} \div \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} + ٢س}$

② $ن(س) = \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} - ١} + \frac{س - ٥}{س^{٢} - ٦س + ٥}$

③ $ن(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - ٢س + ١} \times \frac{٢س - ٢}{س^{٢} + س + ١}$

④ $ن(س) = \frac{٣س^{٢} - ٦س}{س^{٢} - ٤} \times \frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س^{٢} + س}$

⑤ $ن(س) = \frac{س + ٣}{(س - ٢)(س + ٧)} \div \frac{س^{٢} + ٣س}{٢س + ١٤}$

⑥ $ن(س) = \frac{٣س}{س^{٢} - ٢س} - \frac{١٢}{س^{٢} - ٤}$

⑦ $ن(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٧س + ١٢} - \frac{س - ٣}{٣ - س}$

⑧ $ن(س) = \frac{٢س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢}$

⑨ $ن(س) = \frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١} - \frac{س + ٥}{س^{٢} + ٦س + ٥}$

[اختبار على الوحدة الثانية]

[١] أكمل ما يأتي:

① $ن(س) = \frac{س - ٣}{س}$ فإن مجال $ن^{-١}(س)$ هو ....

② إذا كان $\frac{س - أ}{س - ٣}$ معكوس الضربي $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن $أ = ...$

③ المعكوس الجمعي للكسر $\frac{س - ١}{س + ٥}$ هو ....

④ إذا كان $ص(د) = \{٢\}$ ، $د(س) = س - أ^{٣}$ فإن $أ^{٣} = ...$

⑤ المجال المشترك للكسرين $\frac{٢}{س - ٣}$ ، $\frac{٧}{س - ٦}$ هو ....

⑥ أبسط صورة للكسر الجبري $\frac{٥ - س}{س - ٥}$ هو ....

[٢]

(أ) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٤٩}{س^{٣} - ٨} \div \frac{س + ٧}{س - ٢}$ واحسب قيمة $ن(١)$ ، $ن(-٧)$ إن أمكن

(ب) أوجد المجال المشترك الذي يتساوى فيه الكسران $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} + س - ١٢}{س^{٢} + ٥س + ٤}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{س^{٢} + ٢س + ١}$

[٣]

(أ) إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢}}{س^{٣} - س^{٢}}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} + س^{٢} + س}{س^{٤} - س}$ اثبت أن $ن_{١} = ن_{٢}$

(ب) أوجد $ن^{-١}(س)$ في أبسط صورة مبيناً مجالها حيث $ن(س) = \frac{٢س - ٦}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ ثم أوجد $ن(١)$ ، $ن(٣)$ إن أمكن وإذا كان $ن^{-١}(س) = ٥$ أوجد قيمة س

[٤]

(أ) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} - ٤} + \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + ٥س + ٦}$

(ب) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال $ن(س) = \frac{س + ١}{س^{٢} - س - ٢} \times \frac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{٣س^{٢} + ١٦س + ٥}$

الوحدة الثالثة [الإحتمال]

التجربة العشوائية: هي تجربة نعرف جميع نواتجها مسبقاً ولكن لا نستطيع تحديد أي من النواتج هو الذي سيظهر

فضاء العينة (ف): هو جميع النواتج للتجربة العشوائية

الحدث (أ) هو الناتج الذي سيظهر وهو جزء من فضاء العينة

لحساب الإحتمال

ل(أ) = ن(أ) / ن(ف) = عدد عناصر الحدث / العدد الكلي

إحتمال الحدث المستحيل = صفر

إحتمال الحدث المؤكد = ١ = ١٠٠٪

صفر ≤ ل(أ) ≤ ١

مثال ١ صندوق يحتوي على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء، ٤ كرات حمراء، وباقي الكرات بيضاء سحبت كرة عشوائياً أوجد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة

أ زرقاء = ٥/١٢ = ٠٫٤١٦

ب ليست حمراء = (٥+٣)/١٢ = ٨/١٢ = ٢/٣

جـ زرقاء أو حمراء = (٥+٤)/١٢ = ٩/١٢ = ٣/٤

د صفراء = صفر حدث مستحيل

هـ ليست صفراء = ١٢/١٢ = ١ حدث مؤكد

مثال ٢ سحبت بطاقة عشوائياً من ٢٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٢٠ احسب إحتمال أن تكون البطاقة المختارة تحمل عدداً:

أ يقبل القسمة على ٣ = ٦/٢٠ = ٣/١٠
= {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥، ١٨}

ب يقبل القسمة على ٥ = ٤/٢٠ = ١/٥
{٥، ١٠، ١٥، ٢٠}

جـ يقبل القسمة على ٣ ويقبل القسمة على ٥

نأخذ التقاطع {١٥}

الإحتمال = ١/٢٠

د يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة ٥

نأخذ الإتحاد = {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥، ١٨، ٥، ١٠، ٢٠}

الإحتمال = ٩/٢٠ = ٠٫٤٥

ملاحظات هامة :-

١ إذا كان أ، ب حدثان متنافيان فإن أ ∩ ب = ϕ ، ل(أ ∩ ب) = صفر

٢ إذا كان أ ⊂ ب فإن

ل(أ) = ل(أ ∩ ب)

ل(ب) = ل(أ ∪ ب)

⊂ ← جزئية من

∩ ← تقاطع ∪ ← إتحاد

العمليات على الأحداث :-

١ إحتمال وقوع أ وب معاً

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

٢ إحتمال وقوع أ أو ب أو كلاهما

← إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

← إحتمال وقوع أي من الحدثين

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٣ الفرق بين حدثين

← إحتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع ب

← إحتمال وقوع الحدث أ فقط

ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

④ الحدث المكمل أَ

ل(أ)َ = ١ - ل(أ)

ل(أ) + ل(أ)َ = ١

ل(أ ∩ أَ) = صفر

← إذا كان ل(أ) = ل(أ)َ فإن

ل(أ) = ١/٢ ، ل(أ)َ = ١/٢

⑤ احتمال عدم وقوع أ و ب معاً

ل(أ ∩ ب)َ = ١ - ل(أ ∩ ب)

⑥ احتمال عدم وقوع أي من الحدثين

ل(أ ∪ ب)َ = ١ - ل(أ ∪ ب)

⑦ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

← احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

= ل(أ - ب) + ل(ب - أ)

⑧ ل(ف) = ١

⑨ ل(φ) = صفر

مثال ③ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل(ب) = ١/١٢ ، ل(أ) = ٥/١٢ ، ل(أ ∪ ب) = ١/٣ أوجد

① ل(أ ∩ ب) ② ل(أ - ب)

③ ل(أ)َ ④ ل(أ ∪ ب)َ

الحل

① ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∪ ب)

= ١/١٢ + ٥/١٢ - ١/٣ = ١/٦

② ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ ∩ ب)

= ٥/١٢ - ١/٦ = ١/٤

③ ل(أ)َ = ١ - ل(أ) = ١ - ٥/١٢ = ٧/١٢

④ ل(أ ∪ ب)َ = ١ - ل(أ ∪ ب) = ١ - ١/٣

= ٢/٣

مثال ④ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧ أوجد ل(أ) إذا كان

أ أ ، ب حدثان متنافيان ب ب ⊂ أ

الحل أ أ ، ب حدثان متنافيان

فإن ل(أ ∩ ب) = صفر

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

٠,٧ = ل(أ) + ٠,٣ - صفر

ل(أ) = ٠,٧ - ٠,٣ = ٠,٤

ب ب ⊂ أ

فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ)

∴ ل(أ) = ٠,٧

مثال ⑤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(أ) = ٠,٨ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٦ فأوجد

أ احتمال عدم وقوع الحدث أ

ل(أ)َ = ١ - ل(أ) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

= ٠,٨ + ٠,٧ - ٠,٦ = ٠,٩

جـ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

= ل(أ - ب) + ل(ب - أ)

= ل(أ) - ل(أ ∩ ب) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

= ٠,٨ - ٠,٦ + ٠,٧ - ٠,٦ = ٠,٣

د احتمال وقوع ب فقط

ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

= ٠,٧ - ٠,٦ = ٠,١

هـ احتمال عدم وقوع أي من الحدثين

ل(أ ∪ ب)َ = ١ - ل(أ ∪ ب) = ١ - ٠,٩ = ٠,١

تمارين (٦)

١ أكمل ما يأتي

١ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين فإن $ل(أ \cap ب) = $ ......

٢ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين فإن $أ \cap ب = $ ......

٣ إذا كانت $أ \subset ب$ فإن $ل(أ \cup ب) = $ ......

٤ إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوي ......

٥ إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة ......
واحتمال ظهور كتابة ......
احتمال ظهور صورة وكتابة ......

٦ إذا ألقي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي وعدد فردي معاً يساوي ......

٧ إذا كان احتمال وقوع أ هو ٦٥٪ فإن احتمال وقوع أَ هو ......

٨ إذا كان $ل(أ) = ل(أ')$ فإن $ل(أ) = $ ......

٩ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين وكان $ل(أ) = \frac{1}{3}$ ، $ل(أ \cup ب) = \frac{7}{12}$ فإن $ل(ب) = $ ......

١٠ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة وكان $ل(أ) = 0.7$ ، $ل(أ - ب) = 0.5$ فإن $ل(أ \cap ب) = $ ......

١١ إذا كان أَ هو الحدث المكمل للحدث أ فإن $أ' \cup أ = $ ...... ، $أ \cap أ' = $ ......

١٢ احتمال الحدث المستحيل = ...

١٣ احتمال الحدث المؤكد = ...

١٤ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين وكان $ل(أ) = 0.2$ ، $ل(ب) = 0.3$ فإن $ل(أ \cup ب) = $ ......

١٥ عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة فإن احتمال ظهور عدد زوجي = ...

١٦ إذا كان احتمال نجاح طالب $\frac{11}{15}$ فإن احتمال رسوبه ......

١٧ عند إلقاء حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد أقل من ٤ يساوي ......

٢ تسع بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٩ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائياً

١ اكتب فضاء العينة

٢ احسب الاحتمالات الآتية

أ أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً زوجياً

ب أن تحمل البطاقة المسحوبة عدد يقبل القسمة على ٣

جـ أن تحمل عدداً أولياً أكبر من ٥

٣ إذا كان $ل(أ) = \frac{3}{8}$ ، $ل(ب) = \frac{1}{2}$ ، $ل(أ \cup ب) = \frac{5}{8}$

فأوجد ① $ل(أ \cap ب)$ ② $ل(أ - ب)$

③ $ل(أ')$ ④ $ل(ب - أ)$

⑤ $ل(أ \cup ب)'$ ⑥ $ل(ب')$

٤ إذا كان $ل(أ) = 0.7$ ، $ل(ب) = 0.6$ ، $ل(أ \cap ب) = 0.4$

أوجد ١ احسب احتمال أ و ب معاً

٢ احسب احتمال وقوع أ أو ب

٣ احسب احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب

٤ احتمال عدم وقوع الحدث ب

٥ احتمال عدم وقوع أي من الحدثين

٦ احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

٥ كيس به ١٥ كرة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٥ سحبت منه كرة عشوائياً. إذا كان الحدث أ هو الحصول على عدد فردي، ب حدث الحصول على عدد أولي أوجد:

$ل(أ)$ ، $ل(ب)$ ، $ل(أ - ب)$ ، $ل(أ \cap ب)$ ، $ل(أ \cup ب)$